CONCOURS ECRIN 1996

SERIE P

COMPOSITION de MATHEMATIQUES

Vendredi 24 mai 1996 de 14 h à 18 h

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer *les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.*

Les candidats pourront admettre certains des résultats demandés et les utiliser par la suite, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement sur leur copie.

"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Le but du problème est de calculer, de deux manières, la valeur de l'intégrale

$$I(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}\,dt$$

où p et q sont deux entiers tels que $0 \leqslant q < p$.

Partie I

Dans cette partie, p et q sont deux entiers fixés vérifiant $0 \leqslant q < p$.

1° Montrer que l'intégrale $I(p,q)$ est convergente.

2° **a)** Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle réelle irréductible et c une racine simple de Q dans $\mathbb{C}$. Démontrer que le coefficient de $\dfrac{1}{X-c}$ dans la décomposition de R en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est $\dfrac{P(c)}{Q'(c)}$.

On notera dans la suite de cette partie $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} / \omega^{2p} = -1\}$.

b) Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{X^{2q}}{1+X^{2p}}.$$

c) Montrer que

$$\sum_{\omega\in\Omega} \omega^{2q+1} = 0.$$

3° a) Soient $\omega \in \Omega$, $A > 0$ et $B > 0$. Calculer

$$\int_{-B}^{A} \frac{dt}{\omega - t}$$

(on pourra utiliser la partie réelle et la partie imaginaire de la fraction $\frac{1}{\omega - t}$).

b) En utilisant notamment la question I. 2°. c), montrer que

$$I(p,q) = -\frac{i\pi}{4p} \sum_{\omega\in\Omega} \sigma(\omega)\omega^{2q+1}$$

où

$$\begin{cases} \sigma(\omega) = 1 & \text{si } \mathfrak{Im}(\omega) > 0 \\ \sigma(\omega) = -1 & \text{si } \mathfrak{Im}(\omega) < 0 \end{cases}$$

et où $\mathfrak{Im}(\omega)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe ω.

4° On pose $z_p = \exp\left(\frac{i\pi}{2p}\right)$.

a) Vérifier que l'ensemble Ω est constitué des nombres complexes z_p^{2k+1} et $(\overline{z_p})^{2k+1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

b) Exprimer $I(p,q)$ à l'aide de z_p, et montrer que

$$I(p,q) = \frac{\pi}{2p \sin\left(\frac{2q+1}{2p}\pi\right)}.$$

Partie II

Dans le reste du problème on pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(t,\alpha)\,dt \quad \text{avec} \quad f(t,\alpha) = \frac{1}{1+t^\alpha}.$$

1° Déterminer l'ensemble D des valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $F(\alpha)$ est convergente.

2° On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n(\alpha) = \int_{1/n}^{n} f(t,\alpha)\,dt.$$

a) Montrer que F_n est continue sur D.

b) Soit $a > 1$. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers F sur $[a, +\infty[$.

c) En déduire que F est continue sur D.

3° a) Soit $\alpha \in D$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{(1+t^\alpha)^2}\,dt$$

est convergente.

b) En utilisant la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ précédente, montrer que F est de classe C^1 sur D.

4° Montrer que $(\forall\, \alpha \in D)\quad F'(\alpha) \leqslant 0$ (on pourra couper l'intégrale en deux et faire un changement de variable).

5° **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} F_n(\alpha)$.

b) En déduire $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} F(\alpha)$.

c) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(\int_1^{+\infty} f(t,\alpha)\, dt \right)$, et montrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\int_0^1 f(t,\alpha)\, dt \right) = 1 .$$

En déduire $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} F(\alpha)$.

d) Dresser le tableau de variation de F et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Partie III

Pour $\alpha \in D$, on pose

$$G(\alpha) = \int_0^1 f(t,\alpha)\, dt$$

D désignant l'ensemble du **II.1**).

1° Pour $\alpha \in D$, montrer que

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha - 1}\, G\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right).$$

2° Soit $\alpha \in D$.

a) Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^{\alpha}}\, dt \right).$$

b) En déduire

$$G(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n\alpha}.$$

c) En déduire, en utilisant le résultat du **III.1**), une expression de $F(\alpha)$ à l'aide d'une série.

3° Soit a un réel strictement positif n'appartenant pas à $\mathbb{N}$, et φ la fonction d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{cases} \varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R} \\ (\forall\, x \in]-\pi, \pi])\quad \varphi(x) = \cos(a\,x). \end{cases}$$

a) Calculer les coefficients de Fourier réels de φ.

b) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction φ est-elle la somme de sa série de Fourier ?

4° Déduire des questions précédentes que

$$(\forall\, \alpha \in D)\qquad F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

5° Retrouver la valeur de $I(p,q)$ pour p et q entiers vérifiant $0 \leqslant q < p$.